# ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Διάλεξη 9η

07/01/2019

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad , x_0 \in \mathbb{R}.$$

Το $x_0$ είναι ομαλό όταν: $a_2(x_0) \neq 0$

$\wedge$ $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}$ } να είναι αναλυτικές

$\downarrow$ $\downarrow$

$R_1 > 0$ $R_2 > 0$

Εάν ένα από τα πηλίκα $\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_0}{a_2}$ δεν είναι αναλυτική συνάρτηση, πολλαπλασιάζω με το $(x-x_0)$, $(x-x_0)^2$ αντίστοιχα και προκύπτει:

$$\frac{a_1}{a_2}(x-x_0) = \underbrace{A_1(x)}_{\text{αναλυτική σω}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n \quad , R_1 > 0$$

$$\frac{a_0}{a_1}(x-x_0)^2 = \underbrace{A_0(x)}_{\text{αναλυτική σω.}} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n \quad , R_2 > 0$$

↳ Τα σημεία αυτά ονομάζονται κανονικά ομαλά.

Στην περίπτωση που έχω ανώμαλα σημεία, όπως είναι το $|x|$, το οποίο δεν παραγωγίζεται στο μηδέν, ή το $\sqrt[3]{x+1}$ στο $-1$ ν.ο.υ, τότε χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα:**

Έστω $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_1}{a_2}(x-x_0) = A_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n \quad &, (\text{ακτίνα: } R_1) \\ \frac{a_0}{a_2}(x-x_0)^2 = A_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n \quad &, (\text{ακτίνα: } R_2) \end{aligned}\right\} R = \min\{R_1, R_2\}$$

Παίρνουμε την εξίσωση $\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$

$\lambda_1 \quad \lambda_2$

$Re\lambda_2 < Re\lambda_1$

$y_1(x) = |x-x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n, \ c_0 = 1$, σε πεδίο ορισμού

$|x-x_0| < R$.

(i) $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$:

$y_2(x) = |x-x_0|^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n, \ d_0 = 1$.

Π.χ.

$2x^2 y'' + (x-x^2) y' - y = 0, \quad x_0 = 0$

$a_2(x) = 2x^2, \quad a_2(0) = 0$

$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} (x-0) = \frac{x-x^2}{2x^2} x = \frac{(1-x)x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}, \ R_1 = +\infty, \ p_0 = 1/2$

$\frac{a_0(x)}{a_2(x)} x^2 = -\frac{1}{2x^2} x^2 = -\frac{1}{2}, \ q_0 = -1/2, \ R_2 = +\infty$

$\lambda^2 + (\frac{1}{2} - 1)\lambda + (-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 - 1/2\lambda - 1/2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 1}}$ ή $\underline{\underline{\lambda = -1/2}}$

Θα πάρω την πρώτη περίπτωση:

$0 < x \quad y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}, \ x > 0$

$y_1'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) x^n$

$y_1''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1) n x^{n-1}$

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)n x^{n-1} + (x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(n+1)n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+1)x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$2c_0\cdot 1\cdot 0x + c_0\cdot 1\cdot x - c_0\cdot x + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2c_n(n+1)n + c_n(n+1) - nc_{n-1} - c_n\right]x^{n+1} = 0$$

$$\overset{=0}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}\left[2c_n(n+1)n + c_n(n+1) - nc_{n-1} - c_n\right]x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$c_n\left[2(n+1)n + n+1-1\right] = nc_{n-1}, \quad n \geq 1 \Rightarrow$$

$$n(2n+3)c_n = nc_{n-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2n+3}c_{n-1}, \quad n \geq 1}$$

για $n=1$: $c_1 = \frac{1}{5}\cdot c_0$

$n=2$: $c_2 = \frac{1}{7}c_1$

$\vdots$

$c_n = \frac{1}{2n+3}c_{n-1}$ //

για την 2η περίπτωση (λύση):

$x>0$: $y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1/2}$

$y_2'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(n-1/2)x^{n-3/2}$

$y_2''(x) = \ldots\ldots$

$$0 = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n-1/2)(n-3/2) x^{n-5/2} + (x - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n-1/2) x^{n-3/2}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1/2} \quad \Rightarrow$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 2 d_n (n-1/2)(n-3/2) x^{n-1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n-1/2) x^{n-1/2} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} d_n (n-1/2) x^{n+1/2} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{n-1/2}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1} (n-3/2) x^{n-1/2}$$

$$d_n = \frac{1}{2n} d_{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$d_1 = \frac{1}{2 \cdot 1} d_0$$

$$d_2 = \frac{1}{2 \cdot 2} d_2$$

$$\ldots$$

$$d_n = \frac{1}{2 \cdot n} d_{n-1}$$

$$d_n = \frac{1}{2^n \cdot n!}$$

CTGI $\quad y_2(x) = |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n, \quad x \in \mathbb{R}$

$$= |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot x^n$$

$$= |x|^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^n}{n!} = |x|^{-1/2} e^{x/2}$$